2017 年经济类联考数学真题解析

二、数学单项选择题：第 21-30 题（本大题共 10 小题，每小题 2 分，共 20 分）

21. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $f'(x_0)=$（　　）

（A）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$

（B）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$

（C）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

（D）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$

【答案】D

【解析】由导数定义可得答案选 D.

22. 已知 $x+\dfrac{1}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int xf(x)dx=$（　　）

（A）$\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|$　　（B）$x-\ln|x|+c$　　（C）$x-\ln|x|$　　（D）$\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|+c$

【答案】D

【解析】$f(x)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)'=1-\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow\int xf(x)dx=\int\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{1}{2}x^2-\ln|x|+C$，答案选 D.

23. $\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}dx=$（　　）

（A）e^3　　（B）$2e^3$　　（C）$3e^3$　　（D）$4e^3$

【答案】B

【解析】$\int_1^5 e^{\sqrt{2x-1}}dx\ \underline{\underline{\sqrt{2x-1}=t}}\ \int_1^3 e^t t dt=\int_1^3 t de^t=te^t\Big|_1^3-\int_1^3 e^t dt=3e^3-e-e^3+e=2e^3$，选 B.

24. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf'(x)dx=$（　　）

（A）$\dfrac{4}{\pi}-1$　　（B）$\dfrac{4}{\pi}+1$　　（C）$\dfrac{2}{\pi}-1$　　（D）$\dfrac{2}{\pi}+1$

【答案】A

【解析】$f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf'(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xdf(x) = xf(\mathrm{x})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\mathrm{x})dx = \left[\pi f(\pi) - \frac{\pi}{2} f(\frac{\pi}{2})\right] - \frac{\sin x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -1 + \frac{4}{\pi}$$，选 A.

25. 已知 $x=1$ 是函数 $y=x^3+ax^2$ 的驻点，则常数 $a=$（　　）.

（A）0　（B）1　（C）$-\frac{3}{2}$　（D）$\frac{3}{2}$

【答案】(C)

【解析】由已知得，$y'=3x^2+2ax$，则 $y'(1)=3+2a=0$，故 $a=-\frac{3}{2}$.

26. 设 $z=1+xy-\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=3\\y=4}}=$（　　）.

（A） $\frac{17}{5}$　（B）$\frac{n}{5}$　（C）$\frac{7}{5}$　（D）$\frac{1}{5}$

【答案】(A)

【解析】由 $\frac{\partial z}{\partial x}=y-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x=3\\y=4}}=\frac{17}{5}$.

27. 如下函数中，哪个不能作为随机变量 X 的分布函数（　　）.

（A）$F_1(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x^2}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$　（B）$F_2(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{3} & 0\le x<4\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$

（C）$F_3(x)=\begin{cases}1-e^{-x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　（D）$F_4(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & x\ge 0\end{cases}$

【答案】(D)

【解析】由 $F_4(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{1+x}=0\ne 1$，故选（D）.

28. 设随机变量 $X\sim N(1,1)$，概率密度为 $f(x)$，分布函数 $F(x)$，则下列正确的是（　　）。

（A）$P(X\le 0)=P(X\ge 0)$　（B）$P(X\le 1)=P(X\ge 1)$

（C）$f(x)=f(-x), x\in R$　（D）$F(x)=1-F(-x), x\in R$

【答案】(B)

【解析】由 $X\sim N(1,1)$，所以 X 的密度函数关于 $x=1$ 对称，故有 $P(X\le 1)=P(X\ge 1)=\frac{1}{2}$，选（B）。

29. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$E$ 为单位阵，$BA=B+2E$，求 $B=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ （B）$\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ （C）$\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$ （D）$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$

【答案】D

【解析】由 $BA=B+2E \Rightarrow B(A-E)=2E$，$A-E=\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}, |A-E|=2\neq 0 \Rightarrow A-E$ 可逆

$B=2(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$，答案选 D.

30. 已知 A,B 为三阶方阵，且 $\left|A\right|=-1,\left|B\right|=2$，求 $\left|2(A^TB^{-1})^2\right|=$（ ）.

（A）-1 （B）1 （C）-2 （D）2

【答案】D

【解析】$\left|2(A^TB^{-1})^2\right|=2^3|A^T|^2|B^{-1}|^2=2$

三、数学计算题：第 31-40（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

31.设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<1\\ a, & x\geq 1\end{cases}, g(x)=\begin{cases}b, & x<0\\ e^x, & x\geq 0\end{cases}$，且 $f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处连续，求 a,b 的值.

【答案】$a=e^{-1},b=1$

【解析】由题设条件可得.

$f(x)+g(x)=\begin{cases}b+e^{-x}, \ x<0\\ e^x+e^{-x}, 0\leq x<1\\ a+e^x, \quad x\geq 1\end{cases}$，$f(x)+g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 处处连续

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\left[f(x)+g(x)\right]=b+1=f(0)+g(0)=2\Rightarrow b=1\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\left[f(x)+g(x)\right]=e+e^{-1}=f(1)+g(1)=a+e\Rightarrow a=e^{-1}\end{cases}$$

32. 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $\int_0^{x^2} f(t-1)dt=x^3$，求 $f'(x)$.

【答案】 $f'(x)=\dfrac{3}{4\sqrt{x+1}}$

【解析】由 $\int_0^{x^2} f(t-1)dt=x^3$ 两边同时对 x 求导得

$$f(x^2-1)\cdot 2x=3x^2 \Rightarrow f(x^2-1)=\frac{3x}{2}$$

$$a):x>0\text{时，令}x^2-1=u\text{，则由}f(x^2-1)=\frac{3x}{2}\Rightarrow f(u)=\frac{3}{2}\sqrt{u+1}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{4\sqrt{x+1}}$$

$$b):x\le 0\text{时，令}x^2-1=u\text{，则由}f(x^2-1)=\frac{3x}{2}\Rightarrow f(u)=-\frac{3}{2}\sqrt{u+1}$$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{2}\sqrt{x+1}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4\sqrt{x+1}}$$

33.（本题满分 5 分）求不定积分 $\int e^x\left(1+e^x\right)^a dx$ 。

【答案】 $\frac{1}{a+1}(1+e^x)^{a+1}+C$ (c 为任意常数)

【解析】 $a)a\ne -1\text{时},\int e^x\left(1+e^x\right)^a dx=\int \left(1+e^x\right)^a d(1+e^x)=\frac{1}{a+1}(1+e^x)^{a+1}+C$

$$b)a=-1\text{时},\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=\int\frac{d(1+e^x)}{1+e^x}=\ln(1+e^x)+C$$

34.（本题满分 5 分）设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$ ，试求 $\int_0^1 xf(x)dx$

【答案】 $\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$

【解析】

$$\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)d\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2 f(\mathrm{x})\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2 f'(x)dx$$

$$=0-\int_0^1\frac{1}{2}x^2e^{-x^4}\cdot 2xdx=-\int_0^1 x^3e^{-x^4}dx=-\frac{1}{4}\int_0^1 e^{-x^4}dx^4=\frac{1}{4}e^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(e^{-1}-1)$$

35.（本题满分 5 分）设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+x$ 在 $x=1$ 处取最大值 5，求 a,b 。

【答案】 $a=-9,b=13$

【解析】 $f'(x)=3ax^2+2bx+1$，由已知得 $\begin{cases}f'(1)=0\\ f(1)=5\end{cases}$，即 $\begin{cases}3a+2b+1=0\\ a+b+1=5\end{cases}$ 故 $a=-9,b=13$

36.（本题满分 5 分）设 $u=f(x,y,z)=xy+xF(z)$，其中 F 为可微函数，且 $z=\frac{y}{x}$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$

【答案】$\frac{\partial u}{\partial x}=y+F(z)-\frac{y}{x}F^{'}(z),\frac{\partial u}{\partial y}=x+F^{'}(z)$

【解析】
$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+F(z)+xF'(z)\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+F(z)-\frac{y}{x}F^{'}(z),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+xF^{'}(z)\frac{1}{x}=x+F^{'}(z)$$

37. 设离散型随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0.3	0.3

求期望 $E(3X+5),D(2X+3)$

【答案】4.4,11.04

【解析】
$$E(3X+5)=3EX+5=3(-0.8+0+0.6)+5=4.4,$$
$$D(2X+3)=4DX=4(E\left(X^2\right)-\left(EX\right)^2)=4(1.6+0+1.2-\left(-0.2\right)^2)=11.04$$

38. 设随机变量 X 的密度函数是 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^3e^{-\frac{x^2}{2}},x>0\\0, \quad x\le 0\end{cases}$，求 X 的分布函数 $F(x)$ 和 $P(-2\le x\le 4)$

【答案】$F(x)=\begin{cases}1-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)e^{-\frac{x^2}{2}},x\ge 0\\0 \quad ,x<0\end{cases}$

【解析】$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；

当 $x\ge 0$ 时，$F(x)=\int_0^x\frac{1}{2}t^3e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$；

综上，$F(x)=\begin{cases}1-\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)e^{-\frac{x^2}{2}},x\ge 0\\0 \quad ,x<0\end{cases}$。

$$P(-2\le X\le 4)=F(4)-F(0)=1-\frac{9}{e^8}$$

39.当 k 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+kx_3=4\\-x_1+kx_2+x_3=k^2\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$ 有唯一解？无解？无穷解？

【答案】$k\neq -1, k\neq 4$时，原方程组有唯一解；$k=4$时，原方程组有无穷多解；$k=-1$时，原方程组无解。

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&k&4\\-1&k&1&k^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&k&4\\0&-1&\dfrac{2-k}{2}&-4\\0&0&\dfrac{(k+1)(4-k)}{2}&k(k-4)\end{pmatrix}$，故 $k\neq -1, k\neq$ 时

$r(A)=r(A,b)=3$，原方程组有唯一解；$k=4$时，$r(A)=r(A,b)=2$原方程组有无穷多解；$k=-1$时，$r(A)=2, r(A,b)=3$原方程组无解。

40.设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，若$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2,\beta_2=2\alpha_2+k\alpha_3,\beta_3=3\alpha_3+2\alpha_1$线性相关，求常数$k$的值.

【答案】$k=-\dfrac{3}{2}$

【解析】由已知得，存在不全为零的k_1,k_2,k_3使得$k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$。即$k_1(\alpha_1+2\alpha_2)+k_2(2\alpha_2+k\alpha_3)+k_3(3\alpha_3+2\alpha_1)=0$，整理得

$(k_1+2k_3)\alpha_1+(2k_1+2k_2)\alpha_2+(kk_2+3k_3)\alpha_3=0$。由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，故$\begin{cases}k_1+2k_3=0\\2k_1+2k_2=0\\kk_2+3k_3=0\end{cases}$有非零解。

故$\begin{vmatrix}1&0&2\\2&2&0\\0&k&3\end{vmatrix}=0$，故$k=-\dfrac{3}{2}$